EJERCICIOS. CONTINUIDAD DE LAS FUNCIONES. MATEMÁTICAS II.

1. Estudia la continuidad de la función:

$$f(x)=\begin{cases} e^x, & si \quad x<0 \\ 2x, & si \quad x\geqslant 0 \end{cases}$$

2. Estudia la continuidad de la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases} \ln x, & si \quad x\leqslant 1 \\ x-1, & si \quad 1<x\leqslant 3 \\ \dfrac{1}{x-3}, & si \quad x>3 \end{cases}$$

3. Estudia la continuidad de la función: $f(x)=\dfrac{2x-2}{x^2-5x+4}$.

4. Dada la función $f(x)=|x-1|+x$:

   a) Escríbela como una función definida a trozos.
   b) Estudia su continuidad.
   c) Represéntala gráficamente.

5. Determina el valor de los coeficientes *a* y *b* para que la siguiente función sea continua en todo $\mathbb{R}$:

$$f(x)=\begin{cases} \cos(x-1), & si \quad x<1 \\ ax+b, & si \quad 1\leqslant x<3 \\ x^2, & si \quad x\geqslant 3 \end{cases}$$

6. a) Enuncie el Teorema de Bolzano.
   b) Demuestre que alguna de las raíces del polinomio $P(x)=x^4-8x-1$ es negativa.
   c) Demuestre que *P(x)* tiene también alguna raíz real positiva.

7. a) Enuncie el Teorema de Bolzano.
   b) Aplique el Teorema de Bolzano para probar que la ecuación $\cos x=x^2-1$ tiene soluciones positivas.
   c) ¿Tiene la ecuación $\cos x=x^2-1$ alguna solución negativa? Razona la respuesta.

8. a) Enuncie el Teorema de Bolzano.
   b) Utilizando el teorema de Bolzano, encuentre un intervalo de la recta real en el que la función polinómica $p(x)=3x^3-x+1$ tenga alguna raíz real.
   c) Utilizando el Teorema de Bolzano, demuestre que las gráficas de las funciones $f(x)=e^x+\ln(1+x^2)$ y $g(x)=e^x+1$ se cortan en algún punto.

9. Demuestra que la función $f(x)=-2x^3+3x-8$ corta al eje de abscisas en el intervalo [-2,2]. ¿Se podría decir lo mismo de la función $g(x)=\dfrac{x^3-2x^2-5}{x-1}$?

10. Estudia si la función $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & si \quad -1\leqslant x\leqslant 2 \\ -3x+11, & si \quad 2<x\leqslant 4 \end{cases}$ verifica las condiciones del Teorema de Weierstrass. Encuentra cuáles son los puntos máximos y mínimos absolutos de los que habla el Teorema (puedes hallarlos representando la función en el intervalo de definición).

SOLUCIONES:

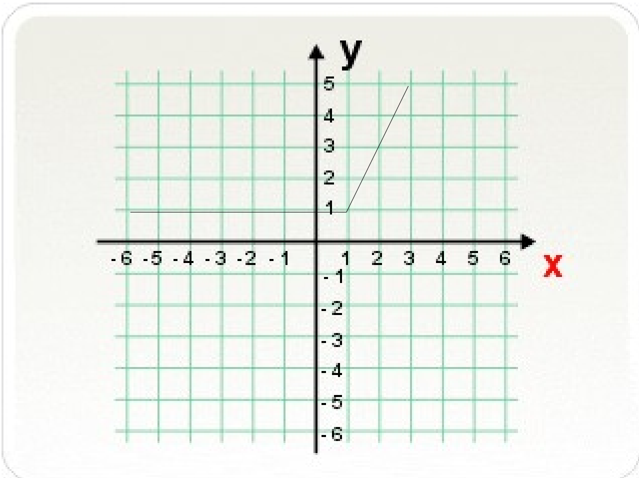
1. En x=0 hay una discontinuidad no evitable, de primera especie, de salto finito. En el resto de valores, la función es continua.

2. En x=3 hay una discontinuidad no evitable, de primera especie, de salto infinito. En el resto de valores, la función es continua.

3. En x=1 hay una discontinuidad evitable.
   En x=4 hay una discontinuidad no evitable, de primera especie, de salto infinito.
   En el rsto de valores, la función es continua.

4. a) $f(x)=|x-1|+x=\begin{cases} -x+1+x, & si \quad x<1 \\ x-1+x, & si \quad x\geqslant 1 \end{cases}=\begin{cases} 1, & si \quad x<1 \\ 2x-1, & si \quad x\geqslant 1 \end{cases}$

   b) La función es continua en todo $\mathbb{R}$.
   c)



5. *a*=4; *b*=-3.

6. a) Teoría.
   b) Aplicar el Teorema de Bolzano en el intervalo [-1,0].
   c) Aplicar el Teorema de Bolzano en el intervalo [0,3].

7. a) Teoría.
   b) Tomar la función auxiliar $f(x)=\cos x-x^2+1$, y aplicar el Teorema de Bolzano en el intervalo [0,2π].
   c) Igual pero con el intervalo [-2π,0].

8. a) Teoría.
   b) Aplicar el Teorema de Bolzano en el intervalo [-1,0].
   c) Tomar la función auxiliar: $h(x)=f(x)-g(x)=\ln(x^2+1)-1$, y aplicar el Teorema de

Bolzano en el intervalo [0,2].

9. La primera función corta al eje de abscisas, pues verifica el Teorema del Teorema de Bolzano en el intervalo [-2,2].
   De la segunda función no podemos decir lo mismo, ya que no es continua en x=-1, y por tanto, no verifica las condiciones del Teorema de Bolzano en el intervalo [-2,2].

10. La función sí verifica las condiciones del Teorema de Weierstrass (continuidad en el intervalo [-1,4]).
    El máximo absoluto es el punto (2,5).
    El mínimo absoluto es el punto (4,-1).