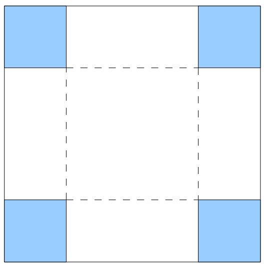
EJERCICIOS. APLICACIONES DE LAS DERIVADAS. MATEMÁTICAS II.

1. Estudia el dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos, la curvatura (intervalos de concavidad y convexidad) y los puntos de inflexión de la función $f(x)=\ln(x^2+4)$.

2. a) Halla las constantes *a*, *b* y *c* para que la función $f(x)=ax^3+bx^2+cx+2$ se anule en x=1, y tenga extremos relativos en x=0 y x=-2.
   b) Indica si dichos extremos son máximos o mínimos.

3. Dada la función $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$:
   a) Halla sus máximos y mínimos relativos.
   b) Halla sus puntos de inflexión.
   c) Escribe la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en su punto de inflexión.

4. A partir de una cartulina cuadrada de 60 cm de lado se va a recortar cuatro cuadrados iguales en las esquinas de la cartulina y doblando después de la manera adecuada. ¿Cuál es el valor que ha de tener el lado de los cuadrados recortados, para que la capacidad de la caja sea máxima?



5. Descomponer el número e en dos sumandos positivos de forma que la suma de los logaritmos neperianos de los sumandos des máxima.

6. a) Enunciar el Teorema de Rolle.
   b) Prueba que cualesquiera que sea la constante *a*, la función $f(x)=x^3-5\text{x}^2+7\text{x}+a$ cumple las hipótesis de dicho teorema en el intervalo [1,3]. Calcula un punto del intervalo (1,3) cuya existencia asegura el teorema.

7. a) Enuncia el Teorema de Cauchy.
   b) Comprueba que se verifican las hipótesis del Teorema de Cauchy para las funciones $f(x)=\text{sen}\,x$ y $g(x)=\cos x$ en el intervalo $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Calcular el valor *c* cuya existencia garantiza el teorema.

8. a) Enuncia el Teorema del valor medio del cálculo diferencial (o Teorema de Lagrange).
   b) Usar el teorema anterior para demostrar que cualesquiera número reales *x*<*y* se verifica que $\cos x - coy \leqslant y - x$.

9. a) Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-x+x^2-1}{x\,\text{sen}\,x}$$

b) Indica, razonadamente, el valor que ha de tomar *a* para que la siguiente función sea continua:

$$f(x)=\begin{cases} a, & si \quad x=0 \\ \dfrac{e^x-x+x^2-1}{x \operatorname{sen} x}, & si \quad x\neq 0 \end{cases}$$

10. Calcula los siguientes límites aplicando la Regla de L'Hôpital:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\operatorname{sen} x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x \operatorname{sen} x}{tg\, x}$

d) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{8+\operatorname{tg} x}{10+\sec x}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{(e^x-1)^2}$

f) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)$

SOLUCIONES:

1. $f(x)=\ln(x^2+4)$

   Dominio: $\mathbb{R}$

   Intervalos de crecimiento y decrecimiento:
   $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+4}=0 \Rightarrow x=0$
   En el intervalo $(-\infty,0)$, $f'(x)<0$, por lo tanto, la función es decreciente, y en el intervalo $(0,\infty)$, $f'(x)>0$, y por tanto la función es creciente.

   Máximos y mínimos relativos:
   $f''(x)=\dfrac{8-2x^2}{(x^2+4)^2}$
   $f''(0)>0$, por tanto, el punto (0,ln 4) es un mínimo relativo.

   Curvatura y puntos de inflexión:
   $f''(x)=\dfrac{8-2x^2}{(x^2+4)^2}=0 \Rightarrow x=\pm 2$
   En los intervalos $(-\infty,-2)$ y $(2,\infty)$, $f''(0)<0$, y por lo tanto, la función es convexa, y en el intervalo $(-2,2)$, $f''(0)>0$, y por tanto, la función es cóncava.

2. a) $f(x)=ax^3+bx^2+cx+2 \Rightarrow f'(x)=3ax^2+2bx+c$

   $f(1)=0 \Rightarrow f(1)=a+b+c+2=0 \Rightarrow a+b+c=-2$

   Como en x=0 y en x=-2 hay extremos relativos, la derivada en esos puntos es nula:

   $f'(0)=0 \Rightarrow f'(0)=c=0$

   $f'(-2)=0 \Rightarrow f'(-2)=12a-4b+c=0$

   Solución: $a=\dfrac{-1}{2}$; $b=\dfrac{-3}{2}$; $c=0$.

   b) $f(x)=\dfrac{-1}{2}x^3-\dfrac{3}{2}x^2+2$
   $f'(x)=\dfrac{-3}{2}x^2-3x$
   $f''(x)=-3x-3$
   $f''(0)<0$, luego en x=0 hay un máximo relativo.
   $f''(0)>0$, luego en x=-2 hay un mínimo relativo.

3. $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$.

   a) $f'(x)=\dfrac{e^x-xe^x}{(e^x)^2}=\dfrac{1-x}{e^x}=0 \Rightarrow x=1$
   $f''(x)=\dfrac{-2+x}{e^x}$

$f''(1)<0$, luego el punto $\left(1,\frac{1}{e}\right)$ es un máximo relativo.

b) $f''(x)=\frac{-2+x}{e^x}=0 \Rightarrow x=2$

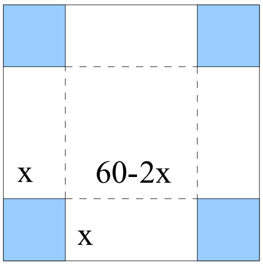
$f'''(x)=\frac{3-x}{e^x}$

$f'''(2)=0$, por tanto, el punto $\left(2,\frac{2}{e^2}\right)$ es un punto de inflexión.

c) Hay que calcular la recta tangente en el punto $\left(2,\frac{2}{e^2}\right)$:

$$y-f(2)=f'(2)\cdot(x-2) \Rightarrow y-\frac{2}{e^2}=\frac{-1}{e^2}\cdot(x-2) \Rightarrow y=\frac{-1}{e^2}x+\frac{4}{e^2}$$

4.



Hay que optimizar la función:

$V(x)=(60-2\mathrm{x})\cdot(60-2\mathrm{x})\cdot x=3600\mathrm{x}-480\mathrm{x}^2+4\mathrm{x}^3$
$V'(x)=3600-480\mathrm{x}+12\mathrm{x}^2=0 \Rightarrow x=30$ ó $x=10$
$V''(x)=-480+24\mathrm{x}$
$V''(30)>0$, por lo que para x=30 tenemos un mínimo.
$V''(10)<0$, por lo que para x=10 tenemos un máximo.

Solución: El valor de x para que el volumen de la caja sea máximo será x=1= cm.

5. Los dos sumandos serán x y e-x.
Hay que optimizar la función $f(x)=\ln x+\ln(e-x)$
$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{e-x}=\frac{e-2\mathrm{x}}{x(e-x)}=0 \Rightarrow x=\frac{e}{2}$
$f''(x)=\frac{-1}{x^2}-\frac{1}{(e-x)^2}$
$f''\left(\frac{e}{2}\right)<0$, luego para $x=\frac{e}{2}$ tenemos un máximo.

Solución: Los sumandos para que la suma de los logaritmos sea máxima son $\frac{e}{2}$ y $\frac{e}{2}$.

6. a) Teoría.
b) $f(x)$ es continua en el intervalo [1,3] y derivable en el intervalo (1,3). Además:
$f(1)=3+a$ y $f(3)=3+a$, es decir, $f(1)=f(3)$. Por tanto por el Teorema de Rolle, existirá $c\in(1,3)$ tal que $f'(c)=0$.

Calculamos este c:

$$f(x)=x^3-5x^2+7x+a \Rightarrow f'(x)=3x^2-10x+7=0 \Rightarrow x=\frac{7}{3} \quad \text{o} \quad x=1$$

Los puntos donde la derivada se anula son los puntos de abscisas $x=\frac{7}{3}$ y $x=1$. Como $1 \notin (1,3)$, el valor c que buscamos es $c=\frac{7}{3}$.

7. a) Teoría.
   b) $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas en el intervalo $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, y derivables en el intervalo $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Además $g(0)\neq g\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Por tanto, existe $c\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ tal que $\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$. Tendríamos entonces que:
   $$\frac{\cos c}{-\operatorname{sen} c}=\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)-\operatorname{sen} 0}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)-\cos 0} \Rightarrow \cos c=\operatorname{sen} c \Rightarrow c=\frac{\pi}{4}\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

8. a) Teoría.
   b) Aplicamos el Teorema de Lagrange a la función $f(x)=\cos x$ en cualquier intervalo de la recta real de la forma $[x,y]$ donde $x<y$. $f(x)=\cos x$ será continua en el intervalo $[x,y]$ y derivable en el intervalo (x,y). Entonces, existirá $c\in(x,y)$ tal que $f'(c)=\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$. En concreto para la función $f(x)=\cos x$ tendremos:
   $$-\operatorname{sen} c=\frac{\cos y-\cos x}{y-x} \Rightarrow \operatorname{sen} c=\frac{\cos x-\cos y}{y-x}.$$
   Como sabemos que $\operatorname{sen} c\leqslant 1$ para todo $c\in\mathbb{R}$, tendremos que:
   $\frac{\cos x-\cos y}{y-x}\leqslant 1$, de donde deducimos que $\cos x-coy\leqslant y-x$.

9. a) Aplicando la Regla de L'Hôpital: $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x+x^2-1}{x\operatorname{sen} x}=\frac{3}{2}$.
   b) Para que la función sea continua tiene que ocurrir que
   $\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=a \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{e^x-x+x^2-1}{x\operatorname{sen} x}=a$. Por tanto por al apartado anterior tendremos que $a=\frac{3}{2}$.

10. a) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\operatorname{sen} x}=2$

    b) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos(3x))}{\ln(\cos(2x))}=\frac{9}{4}$

    c) $\lim_{x\to 0}\frac{x\operatorname{sen} x}{tg\, x}=0$

d) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{8+\operatorname{tg} x}{10+\sec x}=1$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{\left(e^{x}-1\right)^{2}}=\dfrac{1}{2}$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{2}$